2010 年 5 月 31 日

力学第一演習 No. 06 解答　（月 5）担当：西村 信哉*

10. 束縛運動

問 1. エレベータの床に置かれた物体の運動である．物体は常にエレベータに接しながら（床に置かれたままに）運動をする．

(1) エレベータ内の物体は，一様重力中（一様重力場）に置かれ，またエレベータの床のみに接触している．したがって，物体が受ける力は，問題中に指定されているように，鉛直上向きを正として座標軸（x 軸）を取ると，重力 $-mg$ と垂直抗力 N の２つである．運動方程式は，

$$\underline{ma = -mg + N} \tag{1}$$

と書ける．（垂直抗力 N の値は運動状態によって変化する．）

(2) エレベータが等速度運動（加速度が常に等しい運動）をするとき，中の物体も等速度運動を行う．すなわち，物体の加速度 $a = 0$ である．したがって，運動方程式 (1) より，

$$0 = -mg + N$$

よって，垂直抗力は，

$$\underline{N = mg}$$

である．重力と同じ大きさで向きが反対で，力の釣り合いの条件に等しい．

(3) 運動方程式 (1) より，加速度は，

$$a = g - \frac{N}{m}$$

となる．ここで，運動が等加速度（a が一定）であるので，左辺は定数であり，右辺の第一項 g も定数であるので，N も定数である．すなわち，垂直抗力 N はこの運動の間で変化しない．さらに，両辺を時間で積分すると，積分定数を C として，

$$v = \left(g - \frac{N}{m}\right) t + C$$

となる．ここで，運動の条件は，あるとき（$t = 0$）で $v = v_0$ で運動していた物体が，τ 後（$t = \tau$）で運動を停止（$v = 0$）したということなので，まず，$t = 0$ で $v = v_0$ より，積分定数 C は v_0 であることが分かるので、

$$v = \left(g - \frac{N}{m}\right) t + v_0$$

となる．これに，停止状態の条件 $t = \tau$，$v = 0$ を代入すると，

$$0 = \left(g - \frac{N}{m}\right) \tau + v_0$$

となり，これを整理すると，

$$\underline{N = mg - m\frac{v_0}{\tau}}$$

が得られる．垂直抗力は，重力とくらべて，向きが逆向きで大きさは小さい．

(4) 垂直抗力 N は外部によって与えられるので，まずは，運動の状態（位置の変化）を決めることから始める．物体は，振幅が A で角振動数が ω の単振動であるので，位置の変化は，高さについての不定定数 A_0 と位相に関する不定定数 θ_0 を用いて，

$$x = A\sin(\omega t + \theta_0) + A_0$$

* 国立天文台／電通大 非常勤　e-mail: nobuya.nishimura@nao.ac.jp

と表すことができる．また，速度は両辺を時間微分して，

$$v = A\omega\cos(\omega t + \theta_0)$$

と得られ，この単振動の条件，$t = 0$ での床（物体）の位置 $x = A$ であるので，

$$A = A\sin\theta_0 + A_0$$

となり，また，この時の速度が 0 であるので，

$$0 = A\omega\cos\theta_0$$

となり，以上の２式を満たすことから，$\theta_0 = \pi/2$，$A_0 = 0$ と決まり，

$$x = A\cos\omega t$$

と変形できる．これより，両辺の二階時間微分をとると，

$$a = -\omega^2 A\cos\omega t$$

となるので，これを運動方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} N &= mg + ma \\ &= \underline{mg - m\omega^2 A\cos\omega t} \end{aligned}$$

が得られる．これより，N の変化 (最大と最小) は，第二項に等しい．したがって，最大値は $m(g+\omega^2 A)$，最小値は $m(g-\omega^2 A)$ である．

11. 斜面上の運動

問 2. 斜面上にある物体の運動である．斜面に沿った方向と垂直方向それぞれの運動方程式を立てて，物体が動かない条件を考える．ただし，垂直抗力や摩擦力といった力は，両方とも床の角度を変化させてもそれに合わせて大きさが変わるので，値を決定するためにはある特殊な条件を課さないといけない．

(1) 物体に働く力は，重力と接触している斜面から受ける力である．重力は常に鉛直下方向に働くので，斜面方向とそれに垂直な方向に分解する．重力は，鉛直方向に mg の大きさであるが，幾何学的に分解できて，まず斜面方向の成分は，$mg\sin\theta$ であり，それに垂直な成分は，$-mg\cos\theta$ である．ただし，正負の取り方は，斜面に沿って下向きを正，斜面に垂直方向では，斜面から離れる方向が正であることから決まる．また，物体が床から受ける力は，垂直抗力 N と静止摩擦力 f である．したがって，斜面方向とそれに垂直な方向の運動方程式の成分は，それぞれ，

$$\begin{cases} \underline{ma_t = mg\sin\theta - f \qquad (\text{斜面方向})}, \\ \underline{ma_n = N - mg\cos\theta \qquad (\text{斜面に垂直な方向})} \end{cases} \tag{2}$$

となる．

(2) まず，θ が小さく斜面の傾斜がない状態からはじめて，だんだんと角度を大きくしていくと，θ がある大きさになったときに滑りおち始めると考えられる．とくに，斜面が垂直であるとき，すなわち $\theta = \pi/2$ では，もちろん物体は斜面上にとどまることができないので，$0 < \theta < \pi/2$ として十分である．運動方程式 (2) を見ると，それぞれ未知の量 f と N を含む．物体が斜面に乗って動かない範囲で傾斜角を変えていくと，これらの値は釣り合いの条件によって，変化する．それぞれの運動方程式より，物体が静止しているとき，

$$\begin{cases} 0 = mg\sin\theta - f \\ 0 = N - mg\cos\theta \end{cases}$$

が成り立つ．ただし，これらの式はどちらも未知数 f と N を含んでいるので，一意的に決めることはできない．ここで，極限的な状況，すなわち，物体が滑り始める瞬間を考える．物体が滑り始める瞬間の摩擦力を最大摩擦力というが，摩擦力は，この値を超えることがきない．したがって，物体が滑り始める瞬間は，

$$\begin{cases} 0 = mg\sin\theta - \mu N \\ 0 = N - mg\cos\theta \end{cases}$$

が成り立つが，垂直方向に関しては，

$$N - mg\cos\theta < 0 \tag{3}$$

が常に成り立つので，

$$\begin{cases} mg\sin\theta - \mu N = 0 \\ N - mg\cos\theta < 0 \end{cases}$$

と書き換えられる．これらの式から N を消去すると，

$$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta < 0 \tag{4}$$

となる．この両辺を $mg\cos\theta > 0$（θ は $0 < \theta < \pi/2$ である）で割ると，

$$\underline{\tan\theta < \mu} \tag{5}$$

という条件が得られる．

12. 単振り子

問 3. 単振り子の運動である．振り子の振れ幅に対して，糸の長さが十分に長い場合に成り立つ．

(1) 重力は鉛直下向きに大きさ mg で働き，糸の張力は振り子の糸にそって固定端からおもりに向かう方向に T で働く．

(2) 重力は常に鉛直方向なので，糸の方向とそれに垂直な方向に分解する．重力の大きさは mg で，糸方向の成分は，$mg\cos\theta$ で，それに垂直な成分は $mg\sin\theta$ である．糸の張力は常に糸の方向であり，固定端からおもりに向かう方向である．

$$\begin{cases} ma_\parallel = T - mg\cos\theta & (\text{糸に平行な方向}), \\ ma_\perp = -mg\sin\theta & (\text{糸に垂直な方向}) \end{cases} \tag{6}$$

(3) 糸の方向とそれに垂直な方向について，それぞれの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\parallel$ と $\boldsymbol{e}_\perp$ とおく．これらは，大きさが 1 で常に垂直 $\boldsymbol{e}_\parallel \cdot \boldsymbol{e}_\perp = 0$ なのであるが，空間に固定されておらず，おもりの運動に従って，常に変化する．ここで，これらの単位ベクトルを用いて，おもりの加速度 $\boldsymbol{a}$ を分解すると，

$$\boldsymbol{a} = a_\parallel \boldsymbol{e}_\parallel + a_\perp \boldsymbol{e}_\perp \tag{7}$$

ここで，おもりは円運動になるので，円運動の速さを v とすると，糸方向の力（向心力）の関係より，$a_\parallel = \dfrac{v^2}{l}$ となり，また，問題文中の条件より，v を未知量として，$a_\parallel = \dfrac{dv}{dt}$ と書ける．以上より，

$$\begin{cases} \underline{m\dfrac{v^2}{l} = T - mg\cos\theta \qquad (\text{糸に平行な方向}),} \\ \underline{m\dfrac{dv}{dt} = -mg\sin\theta \qquad (\text{糸に垂直な方向})} \end{cases} \tag{8}$$

となる．

(4) 糸に垂直な方向の変化は，円弧の長さ s の変化に等しいので，$v = \dfrac{ds}{dt}$ であり，これを時間微分して，$\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ である．また，幾何学的条件（円弧の定義）により，$s = l\theta$ であるから，l が定数であることから，これを代入すると，$\dfrac{dv}{dt} = l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ となる．これより，運動方程式の糸に垂直な方向の成分より，

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \tag{9}$$

が得られる．ここで，θ が微少量であることから，$\sin\theta \simeq \theta$ であることを用いると，

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \simeq -mg\theta \tag{10}$$

となる．したがって，これは θ に関する微分方程式になり，

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \tag{11}$$

となる．

(5) まず，式の表記を簡単にするために $\omega^2 = \dfrac{g}{l}$ とおくと，

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \tag{12}$$

となる．これは単振動の方程式であるので，その解を振幅を θ_0 とすると，

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \phi) \tag{13}$$

と書ける．したがって，振り子の接線方向の一般解は，

$$s = l\theta = l\theta_0\cos(\omega t + \phi) = s_0\cos(\omega t + \phi) \tag{14}$$

である．また，糸方向の運動方程式より，張力は

$$T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{l} \tag{15}$$

である．ここで，$\cos\theta = 1 - \dfrac{1}{2!}\theta^2 + \dfrac{1}{4!}\theta^4 + \cdots$ と展開（テイラー展開）し，θ を微少量として，3 次以下の項を 0 と近似することにすると，$\cos\theta = 1 - \dfrac{1}{2}\theta^2$ であるので，張力は，

$$T = mg\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) + m\frac{v^2}{l} \tag{16}$$

となる．また，接線方向の一般解 (14) より，

$$v = \frac{ds}{dt} = -\omega l\theta_0\sin(\omega t + \phi) \tag{17}$$

となるので，

$$\frac{v^2}{l} = \omega^2 l{\theta_0}^2\sin^2(\omega t + \phi) = g{\theta_0}^2\sin^2(\omega t + \phi) \tag{18}$$

である．ただし，$\omega^2 = \dfrac{g}{l}$ を用いた．ここで，最下点 $\theta(= \omega t + \phi) = 0$ でおもりの速さ $v = v_0$ であるという条件から，$\theta_0^2 = \dfrac{v_0^2}{gl}$ が成り立つから，

$$\begin{aligned} T &= mg\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) - mg{\theta_0}^2\sin(\omega t + \phi) \\ &= \underline{mg\left\{1 - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{v_0^2}{2gl}\sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}} + \phi\right)\right\}} \end{aligned} \tag{19}$$

となる．