2010 年 6 月 7 日

力学第一演習 No. 07 解答　（月 5）担当：西村 信哉*

13. 減衰振動

問 1. バネに繋がれた物体の運動である．粘性を考慮するので運動状態が複雑になる．特に定数の大きさによって，解の形が大きく異なることに注意する．

(1) バネによる力（復元力）F_k バネの伸び x に比例し，比例定数が k である．また，力の方向は常にもとの位置（平衡点）に戻ろうとするので，変位と逆向きである．すなわち，$\underline{F_k = -kx}$ である．

(2) 粘性抵抗の大きさは，$2ml|v|$ であるが，その向きは常に速度と反対である．したがって，$\underline{F_l = -2mlv}$ となる．

(3) 物体に働く力は，F_k と F_l を合わせて力のみであるので，物体の運動方程式は，

$$\underline{m\ddot{x} = F_k + F_l = -kx - 2ml\dot{x}} \tag{1}$$

となる．

(4) 運動方程式 (1) の両辺を m で割り，整理すると，

$$\ddot{x} + 2l\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

となる．ここで，$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくことにより，この式は，

$$\underline{\ddot{x} + 2l\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0} \tag{2}$$

と変形される．

(5) 運動方程式の解として，$x = e^{\lambda t}$ という形を考える．これを式 (2) に代入すると，

$$(\lambda^2 + 2l\lambda + {\omega_0}^2)e^{\lambda t} = 0$$

となる．この等式が常に成り立つので，

$$\lambda^2 + 2l\lambda + {\omega_0}^2 = 0$$

が得られる．これは，λ の二次方程式なので，代数的に解けて，

$$\lambda = -l \pm \sqrt{l^2 - {\omega_0}^2} \tag{3}$$

である．

(6) l の値によって解の形が異なる．

- $\underline{l = \omega_0 \text{ のとき}}$

  式 (3) より，$\lambda = -\omega_0$（重解）である．このとき解は，$x = f(t)e^{-\lambda t}$ という形で書けるとする．これを，上記の方程式に代入して整理すると，

  $$\ddot{f}(t) = 0 \tag{4}$$

  となるので，C_1，C_2 を定数として，

  $$x = (C_1 t + C_2)e^{\lambda t} \tag{5}$$

  というかたちで書ける．

* 電気通信大学 非常勤講師／国立天文台　e-mail: nobuya.nishimura@nao.ac.jp

- $\underline{l = \frac{1}{2}\omega_0 \text{ のとき}}$
  式 (3) より，
  $$\lambda = \frac{\omega_0}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}i\right) \tag{6}$$
  である．ただし，i は虚数単位であり，この λ は複素数である．このとき独立な解として x_1 と x_2 を考えると，$x_1 = e^{\frac{\omega_0}{2}(-1+\sqrt{3}i)}$，$x_1 = e^{\frac{\omega_0}{2}(-1-\sqrt{3}i)}$ であり，一般解は C_1 と C_2 を定数としてこれらの線形結合，
  $$\begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2 \\ &= e^{-\frac{\omega_0}{2}}\left(C_1e^{\sqrt{3}\omega_0 i/2} + C_2e^{\sqrt{3}\omega_0 i/2}\right) \end{aligned} \tag{7}$$
  で書ける．
- $\underline{l = 2\omega_0 \text{ のとき}}$
  式 (3) より，
  $$\lambda = (-2 \pm \sqrt{3})\omega_0 \tag{8}$$
  である．このとき，上と同様に独立な解を x_1 と x_2 とおいて，C_1 と C_2 を定数として，一般解は，
  $$\begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2 \\ &= e^{-2\omega_0}\left(C_1e^{\sqrt{3}\omega_0} + C_2e^{-\sqrt{3}\omega_0}\right) \end{aligned} \tag{9}$$
  と書ける．

14. 強制振動

問 2. バネの運動に周期的な力が加わる系である．

(1) バネの伸びによる復元力と周囲の媒質による抵抗に加え，問題によって与えられた形での力が加わるので，その和は，
$$\underline{F = -kx - 2ml\dot{x} + F_0\cos\omega t} \tag{10}$$
となる．

(2) 上の設問で求めた力により，運動方程式は，
$$\underline{m\ddot{x} = -kx - 2ml\dot{x} + F_0\cos\omega t} \tag{11}$$
となる．

(3) 運動方程式 (11) の両辺を質量 m で割って整理すると，
$$\underline{\ddot{x} + 2l\dot{x} + \frac{k}{m}x = f_0\cos\omega t} \tag{12}$$
となる．

(4) $l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ を用いて (12) を整理すると，
$$\ddot{x} + 2l\dot{x} + 4l^2x = f_0\cos\omega t \tag{13}$$
となる．この方程式は，左辺に注目すると問 1 での運動方程式の

(5) $l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ である場合，物体の位置 $x(t)$ はどうなるか．また，十分時間が経過したとき，運動はどうなるか．