力学第１演習 No.08

2009/06/21

1. 仕事

問１.

A)

解答）外力$F = F_x i + F_y j$ が物体に作用し，物体が点O から点P まで移動する間にする仕事W は $W = \int_O^P F \times ds$ と定義される．$ds = dxi + dyj$ と表せば，仕事W は$W = \int_O^P (F_x dx + F_y dy)$ となる．さて問題より，$F = axyi + bx^2 j$ であるから，$F_x = axy$，$F_y = bx^2$ と導かれるので，この場合の仕事W は $W = \int_O^P \{(axy)dx + (bx^2)dy\}$ となる．

経路A)は原点と点P を結ぶ直線で表されるので，この経路のx 成分とy 成分の関係は$y = 2x$ という関係式で表される．この関係式を満たすように仕事W を変形すると経路A)を移動した場合の仕事W_A になる．x の積分は変数がx だけ，y の積分は変数がy のみになるように書き直すと，

$$W_A = \int_0^1 ax(2x)dx + \int_0^2 b\left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = 2a\int_0^1 x^2 dx + \frac{b}{4}\int_0^2 y^2 dy = 2a\frac{1}{3} + \frac{b}{4}\frac{8}{3} = \frac{2}{3}(a+b)$$

と求まる．

B) 点O と点P を通る放物線$y = 2x^2$ に沿って移動する場合の仕事W_B．

解答）経路B)は原点が頂点となる放物線で，点P を通るから，この経路のx 成分とy 成分の関係は$y = 2x^2$ という関係式で表される．この関係式を満たすように仕事W を変形すると経路B)を移動した場合の仕事W_B になる．x の積分は変数がx だけ，y の積分は変数がy のみになるように書き直すと，

$$W_B = \int_0^1 ax(2x^2)dx + \int_0^2 b\frac{y}{2}dy = 2a\int_0^1 x^3 dx + \frac{b}{2}\int_0^2 ydy = 2a\frac{1}{4} + \frac{b}{2}\frac{4}{2} = \frac{a}{2} + b$$

と求まる．

C) 点O から点A へx 軸上を移動し，点A から点P へy 軸と平行に移動する場合の仕事W_C （ただし，点A の位置ベクトルは$r_A = 1i$ である）．

解答）経路C)はOA 上の移動では$y = 0$，AP 上の移動では$x = 1$ であり，この関係式を満たすように仕事W を変形すると，経路C)を移動した場合の仕事W_C は下記のように積分範囲も変更される．

x の積分は変数がx だけ，y の積分は変数がy のみになるように書き直すと，

$$W_C = \int_0^1 ax0dx + \int_0^0 bx^2 dy + \int_1^1 a1ydx + \int_0^2 b1^2 dy = 0 + 0 + 0 + 2b = 2b$$

と求まる．

注意：経路が異なると，通常，仕事W は異なるという認識を持つことが重要である．

問２．

１）

解答）重力は鉛直下向きで大きさがmgであるから，単位ベクトルを用いると$-(mg)j$．ばねの力は水平左向きで大きさがkxであるから，単位ベクトルを用いると$-(kx)i$．よって，小物体に作用する力の総和Fは

$$F = -(kx)i - (mg)j$$

となる

２）

解答）微小変位dsは，物体の移動経路上での微小変位であるから，この問題の場合，x軸方向のみの移動であるので，x軸上での微小変位をdxとすると，$ds = dxi + 0j = dxi$と表される．

３）

解答）この場合の微小変位dsでの仕事，すなわち微小仕事$dW = F \cdot ds$を求めると，

$$dW = F \cdot ds = \{-(kx)i - (mg)j\} \cdot (dxi) = -(kx)dx$$

となる．したがって，位置xから原点Oまでの仕事は，この微小仕事を積分して，

$$W = \int_x^0 -(kx)dx = [-\tfrac{k}{2}x^2]_x^0 = \tfrac{k}{2}x^2$$

となる．

４）

解答）３）の場合，移動経路と重力とは常に直交する関係になっている．移動経路の微小変位をds，重力をF_gと置くと，$F_g \cdot ds = 0$となって，重力F_gはこの経路では仕事をしないことになる．つまり重力の仕事W_gは0となる．

問３．

解答）仕事の定義は$W = \int_{A,C}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$で、この定義に従って、この場合以下のように計算できる。

$$W = \int_{A,C}^{B} F \cdot ds = \int_{A,C}^{B} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} (-cx)dx + \int_{y_A}^{y_B} (-cy)dy + \int_{z_A}^{z_B} (-cz)dz = \left[\frac{-cx_B^{\ 2}}{2} - \frac{-cx_A^{\ 2}}{2}\right] + \left[\frac{-cy_B^{\ 2}}{2} - \frac{-cy_A^{\ 2}}{2}\right] + \left[\frac{-cz_B^{\ 2}}{2} - \frac{-cz_z^{\ 2}}{2}\right]$$

$$= -\frac{c}{2}\left(x^2_B - x^2_A\right) - \frac{c}{2}\left(y^2_B - y^2_A\right) - \frac{c}{2}\left(z^2_B - z^2_A\right)$$

なお、この結果を見ると、この場合の仕事は始点と終点の位置だけで決まり、経路に依存しないから<u>弾性力は保存力の一種である</u>ことがわかる。

2.　運動エネルギー

問４．

解答）バネの力のような保存力の場合，その力をF_cとすると，その力によるA点からB点までの仕事$W_{AB} = \int_A^B F_c \cdot dr$は運動方程式$m\frac{dv(t)}{dt} = F_c$を用いて

$$W_{AB} = \int_A^B F_c \cdot dr = \frac{1}{2}m v_B{}^2 - \frac{1}{2}m v_A{}^2$$

と変形することができる．なお$v(t_B) = |v(t_B)|$，$v_A = |v(t_A)|$はA，B点での質点の速度の大きさであり，t_B，t_AはA，B点に質点があった時刻である．１の問２では，位置xから原点Oまでの仕事が

$$W = \int_x^0 -(kx)dx = [-\frac{k}{2}x^2]_x^0 = \frac{k}{2}x^2$$

であったから，位置$x = A$から原点Oまでの仕事は$W = \frac{k}{2}A^2$であり，位置$x = A$の速度は$v(t = 0) = 0$，原点Oでの速度を$v(T/4)$とするので，

$$\frac{k}{2}A^2 = \frac{1}{2}m\, v(T/4)^2 - \frac{1}{2}m\, 0^2 = \frac{1}{2}m\, v(T/4)^2$$

となるから，$v(T/4) = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}}$となる．運動の様子を考えると，位置$x = A$から初めて原点$O$に達した場合，質点の向きは$x$軸の負符号の向きであるから，速度$v(T/4)$は負符号である．したがって，$v(T/4) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}$となる．

問５．

解答）１の問３で示したように，$F = -cr = (-cx)i + (-cy)j + (-cz)k$である力は保存力であるから，その仕事は途中の経路に依存せず，始点と終点の位置で決まる．また，$F = -cr = (-cx)i + (-cy)j + (-cz)k$の向きの(位置$r$のみで力が決まる)対称性から，質点がこの力を受けながら原点Oから半径Rの円周上を運動する場合，円周を描く平面をどのようにとっても仕事は変化しない．そこで，円周をxy平面上に取り，時刻$t = 0$での質点の位置をx軸上に取る（$r(t = 0) = Ri$）ことにする．その場合，反時計回りに回転すると考えれば，時刻$t = T/4$での位置はy軸上の位置($r(t = T/4) = Rj$)となる．したがって，その間の仕事$W_0^{T/4}$は，

$$W_0^{T/4} = -\frac{c}{2}\left(0^2 - R^2\right) - \frac{c}{2}\left(R^2 - 0\right) = 0$$

となる．つまり，半周する間の仕事$W_0^{T/4}$は0である．一方，仕事と運動エネルギーの関係

$$0 = W_0^{T/4} = \frac{1}{2}m\,\{v(t = T/4)\}^2 - \frac{1}{2}m\,\{v(t = 0)\}^2$$

が成立するから，最終的に

$$v(t = T/4) = v(t = 0) = v_0$$

となる．

半径Rの円周上の微小変位dsと弾性力$F = -cr$の向きが常に直交するので，その仕事$W_0^{T/4}$は0となると考えても良い．