力学第 1 演習 No.09

2009/06/28

１．運動エネルギー

問１.

１）y 軸の単位ベクトルをj ，x 軸の単位ベクトルをi とすると，重力F_g は$F_g = (mg)j$ と表されるので，重力のみが働く場合の運動方程式は，$a = \frac{dv_x}{dt}i + \frac{dv_y}{dt}j$ と加速度を表して，$m\left(\frac{dv_x}{dt}i + \frac{dv_y}{dt}j\right) = (mg)j$ となる．この結果から，初期条件を用いると，その解は，$v_x(t) = v_0$ かつ$v_y(t) = gt$ となる．また，$x(t) = v_0 t$ かつ$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$ であるから，高さh 落下するのにかかる時間t は，$\frac{1}{2}gt^2 = h$ より，$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ と求まる．したがって，高さh 落下した時，$v_x(t = t_1) = v_0$ かつ$v_y(t = t_1) = \sqrt{2gh}$ となるから，求める答えは

$$v_h = v_0 i + \sqrt{2gh}j$$

となる．

２）高さh 落下した後の物体の運動エネルギーK_g は$K_g = \frac{1}{2}m\left(v_h\right)^2$ であるから，求める答えは

$$K_g = \frac{1}{2}m\left(v_h\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(v_0 i + \sqrt{2gh}j\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(v_0{}^2 + 2gh\right) = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + mgh$$

である．

３）時刻$t = 0$ での物体の運動エネルギーK_0 は$K_0 = \frac{1}{2}m\left(v_0 i\right)^2 = \frac{1}{2}mv_0{}^2$ より，K_g とK_0 の差ΔK_1 は，

$$\Delta K_1 = K_g - K_0 = \frac{1}{2}m\left(v_0{}^2 + 2gh\right) - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = mgh$$

となる．

４）物体に重力F_g と速さの 1 乗に比例する空気抵抗F_c が働く場合，図で与えられた初期条件では，時刻t での速度のx 成分は$v_x(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$ ，y 成分は$v_y(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$であった．十分時間が経過して，終端速度になっている場合，速度のx 成分は$v_x(t \to \infty) = 0$ ，y 成分は$v_y(t \to \infty) = \frac{mg}{k}$ となる．したがって，その速度v_∞ は

$$v_\infty = 0i + \frac{mg}{k}j = \frac{mg}{k}j$$

となる．

５）物体の運動エネルギーK 　は$K_\infty = \frac{1}{2}m\left(v_\infty\right)^2$ より，

$$K_\infty = \frac{1}{2}m\left(v_\infty\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{mg}{k}j\right)^2 = \frac{1}{2}m^3g^2 / k^2$$

となる．さらに，時刻$t = 0$ での質点の運動エネルギーK_0 の差ΔK_2 は

$$\mathrm{D}K_2 = K_\infty - K_0 = \frac{1}{2}m\frac{m^2g^2}{k^2} - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{m^2g^2}{k^2} - v_0{}^2\right)$$

である．

6）速度が，まだ終端速度になっていない場合，速度は$v(t) = \left(v_0 e^{-\frac{k}{m}t}\right)i + \left(\frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right)j$ であるから，その運動エネルギーを求めてみると，$K(t) = \frac{1}{2}m\left\{v_0^2 e^{-2\frac{k}{m}t} + (\frac{mg}{k})^2\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)^2\right\}$である．あまり時間が経過していない，つまり時刻$t$ が小さい場合，$e^{-\frac{k}{m}t} \simeq 1 + (-\frac{k}{m}t) + \frac{1}{2}(-\frac{k}{m}t)^2 + \cdots$ とマクローリン展開できるので，上記の運動エネルギー$K(t)$ は

$$
\begin{aligned}
K(t) &= \frac{1}{2}m\left\{v_0^2\left(1 - \frac{k}{m}t + \frac{1}{2}(\frac{k}{m}t)^2 + \cdots\right)^2 + (\frac{mg}{k})^2\left(\frac{k}{m}t - \frac{1}{2}(\frac{k}{m}t)^2 + \cdots\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2(\frac{k}{m}t)^2 + \frac{1}{2}m(gt)^2 - \frac{1}{2}k(gt)^3 - \cdots
\end{aligned}
$$

と変形できる．$\frac{1}{2}gt^2 = h$ という関係を満たす時間で考えると，$\frac{1}{2}m(gt)^2 = mgh$ となるので，この時間では

$$K(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_0^2(\frac{k}{m}t)^2 - \frac{1}{2}k(gt)^3 - \cdots$$

と近似することができる．この関係式を眺めると，第１項と２項は，重力のみが働いた場合の運動エネルギーK_g に相当するので，$K(t) = K_g - \frac{1}{2}mv_0^2(\frac{k}{m}t)^2 - \frac{1}{2}k(gt)^3 - \cdots$ と考えることができ，負符号の部分は空気抵抗が働いたことで失ったエネルギーと考えられる．つまり，十分時間が経過すると，この失ったエネルギーが大きくなって，ΔK_1とΔK_2の間に相違が生じるのである．つまり，その相違は空気抵抗が働いたことで失ったエネルギーであると言える．

２．ポテンシャル，位置エネルギー

問１．

１）重力は，大きさgm で，向きが鉛直下向きである．この問題では，y 軸の単位ベクトルj と同じ向きだから，$F_g = gmj$ と表せる．

２）P₁点(位置は$r_{P1} = xi + 0j$)を基準点とした位置$r = xi + yj$ で表される点Pのポテンシャル$U_{P1}(x,y,0)$ は，

$$U_{P1}(x,y,0) = -\int_{P1}^{P}\left(gmj\right)\left(dxi + dyj\right) = -\int_{0}^{y} gm\,dy = -gmy$$

とポテンシャルの定義から求められるので，P₁点とP₂点のポテンシャル$U_{P1}(x,0,0)$，$U_{P1}(x,h,0)$ は

$U_{P1}(x,0,0) = -mg0 = 0$，$U_{P1}(x,h,0) = -mgh$

となる．

３）P₂点(位置は$r_{P2} = xi + hj$)を基準点とした位置$r = xi + yj$ で表される点Pのポテンシャル$U_{P2}(x,y,0)$ は，

$$U_{P2}(x,y,0) = -\int_{P_2}^{P}\left(gmj\right)\left(dxi + dyj\right) = -\int_{h}^{y} gm\,dy = -gm\left(y - h\right)$$

とポテンシャルの定義から求められるので，P₁点とP₂点のポテンシャル$U_{P_2}(x,0,0)$，$U_{P_2}(x,h,0)$ は

$U_{P2}(x,0,0) = -mg\left(0 - h\right) = mgh$，$U_{P2}(x,h,0) = -mg\left(h - h\right) = 0$

となる．

問２．

１）この場合，ポテンシャルを決める重力F_g は$F_g = -gm\,k$ と表されるので，ポテンシャル$U(x,y,z)$ の定義に従い，

線積分$-\int_{r_0}^{r} F\cdot ds$ を計算すると，

$$U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0) = -\int_{r_0}^{r} F\cdot ds = -\int_{r_0}^{r} (-gmk)\cdot(dxi + dyj + dzk) = \int_{r_0}^{r} (gm)dz = gm\int_{z_0}^{z} dz = gmz - gmz_0$$

となる．この結果から，$z_0 = 0$ となれば，$U(0,0,h) = mgh$ の関係が成立し，$U(x_0,y_0,z_0) = 0$ となることが分かる．

よって，$U(x_0,y_0,z_0) = 0$ となる基準点$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ は，$z_0 = 0$ を満たし，$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + 0\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ で表されるxy 平面上に取れば良い．

２）質点に作用する力は，重力とバネの力であるので，質点の位置が$r = xi$ である場合，質点に作用する力の総和F は$F = gm\,i - kx\,i = (gm - kx)i$ （k はバネ定数)と表される．$x = x_0$ で質点が静止した(力の総和F が0)ことより，このバネのバネ定数は$k = \frac{gm}{x_0}$ と表されるので，最終的に質点に作用する力の総和F は$F = (gm - kx)i = -\frac{gm}{x_0}(x - x_0)i$ と表される．この力による線積分$-\int_{r_0}^{r} F\cdot ds$ を計算すると，

$$U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0) = -\int_{r_0}^{r} F\cdot ds = -\int_{r_0}^{r} \left(-\frac{gm}{x_0}(x - x_0)i\right)\cdot(dxi + dyj + dzk) = \frac{gm}{x_0}\int_{r_0}^{r} (x - x_0)dx$$

となる．問題に従って，ポテンシャルの基準点を$r_0 = x_0 i$ とすると，上記の関係式で，確かに$U(x_0,0,0) = 0$ が成立していることが分かる．よって，ばねの伸び(質点の位置)が$x \neq x_0$ の点でのポテンシャル$U(x,0,0)$ は

$$U(x,0,0) = \frac{gm}{x_0}\int_{x_0}^{x} (x - x_0)dx = \frac{gm}{2x_0}(x - x_0)^2$$

と表される．