力学第１演習 No.10

2009/07/05

１．ポテンシャルと力

解答）位置r のポテンシャルが$U(r)$ と与えられた場合，そのポテンシャル中にある質点には

$$F = -\nabla U(r)$$

で表される力が作用する．座標系がxyz 直交座標系の場合，∇（ナブラ）演算子　は，x,y,z 軸の単位ベクトルi,j,k を用いて，

$$\nabla = (i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z})$$

と表される．したがって，質点に作用する力F は，直交座標系で表したポテンシャル$U(r) = U(x,y,z)$ を用いると

$$F = -(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z})U(x,y,z) = \left(-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\right)i + \left(-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\right)j + \left(-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right)k$$

と表される．

１）の場合，上記の関係で$U(x,y,z) = U(x) = Ax^2 - Bx^3$ と考えると

$$-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = -\frac{\partial (Ax^2 - Bx^3)}{\partial x} = -(2Ax - 3Bx^2), \quad -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} = -\frac{\partial (Ax^2 - Bx^3)}{\partial y} = 0, \quad -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = -\frac{\partial (Ax^2 - Bx^3)}{\partial z} = 0$$

であるから，質点に作用する力F は，

$$F = -(2Ax - 3Bx^3)i$$

となる．

２）の場合，$U(x,y,z) = U(x,y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ と考えると

$$-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = -\frac{\partial (k\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} = -\frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} = -\frac{\partial (k\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y} = -\frac{ky}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = -\frac{\partial (k\sqrt{x^2+y^2})}{\partial z} = 0$$

であるから，質点に作用する力$\vec{F}$ は，

$$F = -k\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}i - k\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}j = -\frac{k(xi+yj)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

と表される．

注意：２）の場合，位置ベクトル$r = xi + yj$ を用いて表すと，

$$F = -k\frac{r}{|r|}$$

と表され，その力の大きさは$|F| = k$ であるから**一定**で，向きは$-r/|r|$，すなわち**動径方向原点へ向かう向き**の力であることが分かる．

問２．問１と同様にして，位置r のポテンシャルが$U(r)$ と与えられた場合，そのポテンシャル中にある質点には

$$F = -\nabla U(r)$$

で表される力が作用する．座標系がxyz 直交座標系の場合，質点に作用する力F は，直交座標系で表したポテンシャル$U(r) = U(x,y,z)$ を用いると

$$F = -(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z})U(x,y,z) = \left(-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\right)i + \left(-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\right)j + \left(-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right)k$$

と表される．この問題の場合，ポテンシャルは$U(x,y,z) = -\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ と与えられているので，

$$-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=-C\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-C\frac{x}{r^3},$$
$$-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=-C\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-C\frac{y}{r^3},$$
$$-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=-C\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-C\frac{z}{r^3}$$

であるから，このポテンシャルの元になっている力$\vec{F}$ は

$$\begin{aligned}F&=-\frac{C}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(xi+yj+zk\right)=\left(-\frac{Cx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)i+\left(-\frac{Cy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)j+\left(-\frac{Cz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)k\\&=-\frac{C}{r^3}\left(xi+yj+zk\right)=-\frac{C}{r^2}\frac{r}{r}\end{aligned}$$

となる．したがって，力F のx，y，z 成分$\left(F_x,F_y,F_z\right)$は

$$F_x=-\frac{Cx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad F_y=-\frac{Cy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad F_z=-\frac{Cz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

となり，力の大きさ$\left|F\right|$は

$$|F|=\left|-\frac{C}{r^2}\frac{r}{r}\right|=\frac{C}{r^2}\left|\frac{r}{r}\right|=\frac{C}{r^2}$$

と求まる．

２．力学的エネルギー，力学的エネルギー保存則

問１．

１）この問題では，ばねの力は，大きさがばねの伸びx に比例し，向きは原点O に向かう向き，またばね定数がk と与えられているから，

$$F=-kx$$

となる．

２）ポテンシャルの定義から，基準点を原点O すなわち$x=0$ とした時，力$F=-kx$ に対する，位置x でのポテンシャル$U(x)$は

$$U(x)=-\int_0^x(-kx)dx$$

となるので，積分を実行すると，

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2$$

となる．

３）原点O を基準点としたときのP_1 点($x=A$)でのポテンシャル$U(A)$ は$U(A)=\frac{1}{2}kA^2$．またその点での速度は0 であるので，運動エネルギー$\frac{1}{2}mv^2$ は$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m0^2=0$．力学的エネルギー$E$ は$E=\frac{1}{2}mv^2+U(x)$であるから，P_1 点($x=A$)での力学的エネルギーE は

$$E=0+U(A)=\frac{1}{2}kA^2$$

である．

４）位置$x(t)$ でのポテンシャル$U(x)$は$U(x)=\frac{1}{2}k\left(x(t)\right)^2$．速度$v(t)$ の運動エネルギーは$\frac{1}{2}m\left(v(t)\right)^2$．力学的エネルギー保存の法則は，これらの和が一定であるということ．したがって，P_1 点の力学的エネルギーに等しい．よって，

$$\frac{1}{2}m\left(v(t)\right)^2+\frac{1}{2}k\left(x(t)\right)^2=\frac{1}{2}kA^2$$

となる．

５）ばねの伸びが$\frac{1}{2}A$ の時の小球の速さをv_1 とすると，$\frac{1}{2}mv_1{}^2 + \frac{1}{2}k(\frac{1}{2}A)^2 = \frac{1}{2}kA^2$．一方，原点O 上では，$\frac{1}{2}mv_0{}^2 + \frac{1}{2}k0^2 = \frac{1}{2}kA^2$ という関係が成立．これらを比べると，$|v_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}|v_0|$ となるので，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍である．

６）位置$x_{1/2}$ での力学的エネルギー保存則は$\frac{1}{2}m(0.5v_0)^2 + \frac{1}{2}k\left(x_{1/2}\right)^2 = \frac{1}{2}kA^2$．原点O 上での保存則$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}kA^2$ と比べると，$x_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$ (原点O の左右に２箇所)となる．

３．運動方程式の解と力学的エネルギー保存則の関係，ポテンシャル図

問１.

1）ばねの力のみが作用するので，力の総和は$F = F_k = -kx(t)$ と表され，加速度は$a = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$ と表されるから，運動方程式は

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

となる．

2）両辺をm で割り，$w^2 = \sqrt{k/m}$ と置くと，上記の運動方程式は，

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -w^2x(t)$$

となる．この微分方程式の一般解は，$x(t) = x_0\sin(wt + f)$（x_0，f は積分定数）である．本文によると，時刻$t = 0$で$x = A$，$v = 0$であった．一般解より，$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = wx_0\cos(wt + f)$だから，一般解に$t = 0$を代入して，

$$x_0\sin f = A,\ wx_0\cos f = 0$$

の関係式を得るので，$f = \frac{p}{2}$かつ$x_0 = A$ となる．したがって，この状況に適合する特殊解は

$$x(t) = A\sin(wt + \tfrac{p}{2}) = A\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\right),\ v(t) = A\sqrt{\tfrac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\right)$$

となる．

3）質量m，速度$v(t)$の質点の運動エネルギー$K(t)$ は$K(t) = \frac{1}{2}m\,v(t)^2$ と表され，これに２）で求めた速度$v(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$を代入すると，

$$K(t) = \tfrac{1}{2}m(v(t))^2 = \tfrac{1}{2}mA^2\tfrac{k}{m}\sin^2\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\right) = \tfrac{1}{2}kA^2\sin^2\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\right)$$

となる．

4）バネ定数k のバネの伸びが$x(t)$ である場合，基準点を原点Oに取れば，その位置エネルギー$U(x)$ は$U(x) = \frac{k}{2}x(t)^2$ と表されるので，これに２）で求めた位置$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$を代入すると，

$$U(t) = \tfrac{k}{2}(x(t))^2 = \tfrac{k}{2}A^2\cos^2\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t\right)$$

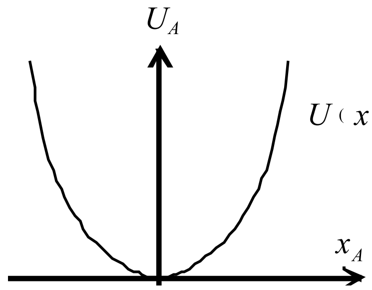
となる．

5） 運動エネルギー$K(t)$とポテンシャル$U(t)$の和$K(t)+U(t)$を３）と４）で求めた結果で表すと

$$K(t)+U(t)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+\frac{k}{2}A^2\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)=\frac{1}{2}kA^2\left\{\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right\}=\frac{1}{2}kA^2$$

となり，時間tが変化しても，$\frac{1}{2}kA^2$は変化しない．つまり，$K(t)+U(t)=\frac{1}{2}kA^2$となって，一定である．

6） $U(x)=\frac{k}{2}x^2$であるから，放物線となるので，下図の結果となる．



7） 物体は$E-U(x)=K(t)>0$を満たす位置xの範囲で動ける（$K(t)>0$なので$v(t)\neq 0$となり，静止せず動いている）ので，力学的エネルギーが$E=\frac{1}{2}kA^2$，ポテンシャルが$U(x)=\frac{k}{2}x^2$の場合，$E-U(x)>0$を満たす位置xの範囲は，

$$\frac{1}{2}kA^2-\frac{k}{2}x^2>0,\ \text{すなわち}A^2>x^2\text{つまり}-A<x<A$$

となる．図で表すと以下のような関係である．