問題番号

2010 年 6 月 14 日

力学第一演習 第 1 回確認テスト　（月 5）担当：西村 信哉*

以下の問題において，座標系について特に明確な指示がない場合，解答中に明確に述べた上で，一貫して取り扱えば自由に選んでよい．また，運動方程式を立てるときなど，必要な変数などは適宜導入するが，問題文で与えられている変数，定数に注意し，最終的な解答に用いる記号を間違えないようにすること．

問題 1．オイラーの公式

変数 x についての連続な関数 $f(x)$ を $x = x_0$ のまわりで x の多項式に展開すると，

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3 f(x_0)}{dx^3}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}(x - x_0)^n + \cdots$$

となり，これをテイラー展開という．この展開式は，物理学のさまざまな場面で登場する．また，これを $x = 0$ のまわりで展開するとき，すなわち $x_0 = 0$ とすると，

$$f(x) = f(0) + \frac{df(0)}{dx}x + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f(0)}{dx^2}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3 f(0)}{dx^3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^n f(0)}{dx^n}x^n + \cdots$$

である．これを特にマクローリン展開ということもある．

この展開式を用いて，以下の手順で有名なオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を導く．

(1) e^x について，$x = 0$ のまわりでテイラー展開せよ．ただし，x について 3 次の項（x^3 の項）まで書け．

(2) $\sin x$ と $\cos x$ について，それぞれ $x = 0$ のまわりでテイラー展開せよ．ただし，最初の 3 項を求めよ．

(3) θ を実数，i を虚数単位（$i^2 = -1$）として，$e^{i\theta}$ を展開せよ．ここで，変数が複素数になっても，テイラー展開の関係式はそのままの形式で成り立つことを前提とし，(1) の結果を用いる．また，展開式について実部と虚部をまとめ，それを (2) の結果と比較し，オイラーの公式を導け．

(4) オイラーの公式において，$\theta = \pi$ とおいてみよ．虚数単位 i，円周率 π，自然対数の底 e（ネイピア数）の間の驚くべき関係式を導くことができる．

問題 2．バネの振動

バネ定数 k のバネ（バネの伸びを l とすると $-kl$ の復元力が働くバネ）を鉛直方向に吊り，下端に質量 m のおもりをつけるともとの長さから x_0 だけ伸びて釣り合って静止した．重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ．

(1) 釣り合いの条件からバネ定数 k を求めよ．

(2) 次に，静止状態からさらにバネを伸ばし，位置 $x = x_0 + A$ で速度が 0 になるような状態にして手を離すと，バネとおもりは鉛直方向に振動した．振動している質点の位置が $x_0 + x$（バネの伸びを x とする）と表される時刻 t での質点の運動方程式を加速度 a を用いて答えよ．

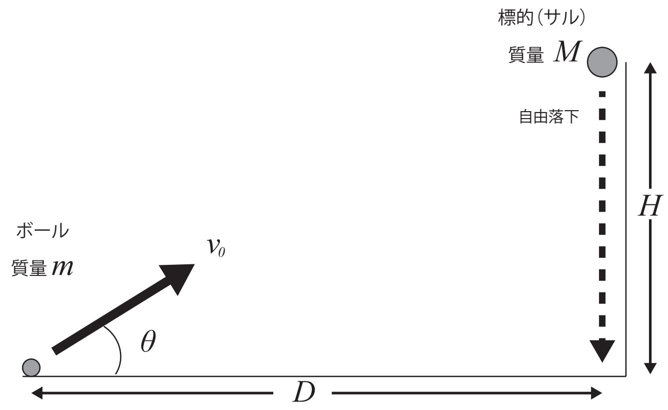
(3) この質点の運動が単振動になることを示せ．

(4) 運動方程式を解き，初期条件を考慮して，この質点の位置 $y = x_0 + x$ を時間 t の関数として求めよ．

（裏面に続く）

* 国立天文台／電通大（非常勤）　e-mail: nobuya.nishimura@nao.ac.jp
Web サイト: http://th.nao.ac.jp/~nishmrnb/lec/me2010/

問題 3．モンキーハンティング



図のように，速さ v_0 で地上から角度 θ で斜め上に質量 m のボールを投げ，標的である質量 M のサルにぶつけようとしている．サルは，ボールの位置から距離 D だけ離れたところにある高さ H の木から自由落下するとし，サルが手を離して落ち始めた瞬間，同時にボールを投げることができるとする．また，ボールとサルについては，質点として取り扱うことができるとする．以下の問題に答えよ．

最初に，運動中の物体に対して，空気抵抗がなく重力加速度 g の一様な重力のみが働く場合 を考える．

(1) ボールについて運動方程式を書き，それを解き時刻 t でのボールの位置を求めよ．

(2) 図のように，ボールの初期位置から距離 D，高さが H の点からサルが落下した．時刻 t でのサルの位置を求めよ．

(3) サルが木から飛び降りると同時にボールを投げたとき，$t = \tau$ 後において，猿とボールが衝突する条件が，$\tan\theta = H/D$ であることを示せ．

次に， ボールとサルの両方とも，運動中に空気抵抗が働く場合 を考える．速度に比例し，運動の向きと反対の方向に空気抵抗（粘性抵抗）を受けるとする．また，この比例定数が k であるとする．すなわち，質量 μ で速度 u の物体の場合には，$-\mu k u$ の力が働く．この場合，以下の問に答えよ．

(4) ボールの運動とサルの運動について，それぞれ運動方程式を立て，それを解いて時刻 t の位置を求めよ．
（ヒント：ボールの速度を v，サルの速度を V とすると，空気抵抗はそれぞれ $-mkv$，$-MkV$ である．）

(5) 上記の問と同様に，ボールがサルに衝突するとして，その条件が変わるかどうかを調べよ。空気抵抗のない場合の条件，$\tan\theta = H/D$ から変化するか？