

力学第1演習 No. 01 (月5) 担当: 西村 信哉*

ベクトルを表すときは、スカラーと混同しないように明確に太字 \mathbf{A} (手書きの場合は太字に見えるように文字の線を一本増やす) または、 \vec{A} と書くこと。以下の問題において、時間、距離などの物理量は、変数に次元 (単位) を含むものとし、角度については弧度法 (ラジアン) (円を1周する角度が 2π) を用いること。また、2次元 xy 座標 (直交座標) での、 x , y 軸の単位ベクトルを、それぞれ \mathbf{i} , \mathbf{j} とする。

1. 位置と変位 ベクトルの基礎, 位置のベクトル表示

問1. 原点を O とする2次元直交座標 (x, y) 上の点 P が、変数 t を用いて、 $x = 1 + t$, $y = \sqrt{3} + t$ (t は媒介変数, または、パラメータなど) で表されるとき、以下の問題に答えよ。

- (1) $t = 0$ での点の位置を P について、原点 O からの距離 \overline{OP} と直線 OP と x 軸が作る角度 $\angle POx_P$ (点 x_P は、点 P を x 軸に射影した点) を求めよ。
- (2) $t = 1$ での点の位置を Q について、点 P からの距離 \overline{PQ} と直線 PQ と x 軸が作る角度 $\angle QPx_P$ を求めよ。
- (3) 位置ベクトル \overrightarrow{OP} と \overrightarrow{OQ} を、 x 軸と y 軸の単位ベクトルを用いて表せ。
- (4) 点 P から点 Q への変位 \overrightarrow{PQ} を、単位ベクトルを用いて表せ。 ($\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$ を用いる)
- (5) t の値が変化する場合、点 P の位置は t を独立変数とする関数になる。ここで、点 P の位置を t の関数として $\overrightarrow{OP}(t)$ と書く。このとき、位置ベクトル $\overrightarrow{OP}(t)$ と変位ベクトル $\overrightarrow{PQ}(t)$ を単位ベクトル \mathbf{i} , \mathbf{j} と変数 t を用いて表せ。ただし、点 P の位置は時刻 t によって変化し、 Q の位置は $t = 1$ の場合に固定する。

問2. ベクトル $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$ (これを x , y 軸成分で表示すると $\mathbf{A} = (1, \sqrt{3})$ である), ベクトル $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ (同様に $\mathbf{B} = (1, 1)$) について以下の問に答えよ。

- (1) ベクトル \mathbf{A} と垂直で大きさが1のベクトル \mathbf{A}_\perp を求めよ。
- (2) ベクトル \mathbf{B} と垂直で大きさが1のベクトル \mathbf{B}_\perp を求めよ。
- (3) 点 P を位置ベクトルがベクトル \mathbf{A} と等しい点とする。点 P を通り、ベクトル \mathbf{B} と平行な直線の方程式を2次元 (x, y) 座標の変数 x と y を用いて書け。
- (4) 上記の点 P を通り、ベクトル \mathbf{B} と垂直な直線の方程式を、同様に、 x と y の方程式で書け。

2. 速度 ベクトルの微分

問3. 原点 O の2次元 xy 空間上の点 P の時刻 t での位置を、 x , y 軸の単位ベクトル \mathbf{i} , \mathbf{j} を用いて、位置ベクトル $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ を用いて表す。それぞれ、 $x(t) = 1 + 2t$, $y(t) = \sqrt{3} + 2t$ という関係を満たすとき、単位ベクトルを用いて、 $\mathbf{OP}(t) = \mathbf{r}(t) = (1 + 2t)\mathbf{i} + (\sqrt{3} + 2t)\mathbf{j}$ と書ける。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) 時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ へ時間が変化した場合の変位 $\Delta \mathbf{s} = \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ を単位ベクトル \mathbf{i} , \mathbf{j} を用いて表せ。
- (2) 時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ へ時間が変化した場合の平均の速度 $\bar{\mathbf{v}}$ を単位ベクトル \mathbf{i} , \mathbf{j} を用いて表せ。
- (3) 点 P の時刻 t での位置が $\mathbf{r}(t)$ であるとき、その瞬間の速度 $\mathbf{v}(t)$ は、時刻 t での位置 $\mathbf{r}(t)$ を時間 t で微分した量、すなわち $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ である。点 P が、時間 t に対して、 $x(t) = 1 + 2t$, $y(t) = \sqrt{3} + 2t$ と変化する場合、速度を求めよ。

* 電気通信大学 非常勤講師 / 国立天文台 e-mail: nobuya.nishimura@nao.ac.jp