

力学第一演習 No. 05 (月5) 担当: 西村 信哉*

以下の問題において、座標系について特に明確な指示がない場合、解答中に明確に述べた上で、一貫して取り扱えば自由に選んでよい。ただし、座標軸の取り方はほとんど選択肢がないと思われるが、その向き（正負の取り方）については、間違えないように慎重に取ること。

9. 単振動の数学的準備

問1. x , t 以外の文字は全て定数であると考えて、以下の問に答えなさい。

- (1) $A \cos wt + B \sin wt = C \cos(wt + D)$ の関係が成り立つ場合、 C , D を A , B を用いて表せ。
- (2) 時間 t の関数 $x(t)$ が $x(t) = C \cos(wt + D)$ と表される場合、関数 $x(t)$ とその2階導関数 $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ はどのような関係になるか。
- (3) 時間 t の関数 $x(t)$ が $x(t) = Ce^{\lambda t} \cos(wt + D)$ と表される場合、関数 $x(t)$ とその導関数 $\frac{dx(t)}{dt}$, 2階導関数 $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ の関係を示せ。
- (4) 虚数単位 i を用いて表される指数関数 e^{iwt} は $e^{iwt} = \cos(wt) + i \sin(wt)$ と定義（オイラーの関係式）される。さて時間 t の関数 $x(t)$ が $x(t) = Ce^{i(wt+D)}$ と表される場合、関数 $x(t)$ とその導関数、2階導関数はどのような関係を満たすか。

10. 弾性力（バネの力）による単振動（水平方向の場合）

問2. 摩擦がない水平な床にそって、バネ定数 k のバネを横たえ、左端は固定し右端には質量 m の質点を固定した。バネが自然長の場合の質点の位置を原点 O として、水平方向右向き（バネがのびる向き）を x 軸にとる。以下の問に答えなさい。

- (1) 質点の座標が $x(> 0)$ のとき、質点に働くバネの力 F はどうなるか。
- (2) 時刻 t での質点の位置を $x(t)$ として、その運動方程式を書け。
- (3) 時刻 $t = 0$ での質点の位置が $x = A$, 速度が 0 である場合、時刻 t での質点の位置 $x(t)$ はどうなるか。
- (4) 時刻 $t = 0$ での質点の位置が $x = 0$, 速度が v_0 である場合、時刻 t での質点の位置 $x(t)$ はどうなるか。

問3. バネ定数 k のバネを鉛直方向に吊り、下端に質量 m のおもりをつけたら、 x_0 だけ伸びて釣り合っただけで静止した。重力加速度を g とする。

- (1) 釣り合いの条件から、バネ定数 k を求めよ。
- (2) 振動している質点の位置が $x_0 + x(t)$ （バネの伸びを $x(t)$ とする）と表される時刻 t での質点の運動方程式を加速度 a を用いて答えよ。
- (3) この質点の運動が単振動になることを示せ。
- (4) 運動方程式を解き、初期条件を考慮して、この質点の位置 $y(t) = x_0 + x(t)$ を時間 t の関数として求めよ。