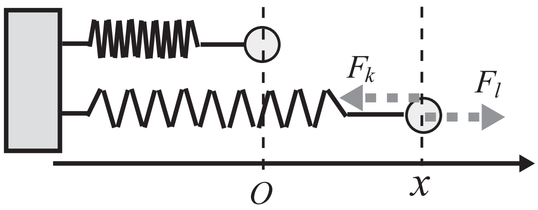
2010 年 6 月 7 日

力学第一演習 No. 07　（月 5）担当：西村 信哉*

x を時間微分する場合，一階の微分は $\frac{dx}{dt}$，二階の微分は $\frac{d^2x}{dt^2}$ と書かれる．ただし，これらをいちいち書いていては多少煩わしい．そこで物理学，とくに力学においてよく使われるのが，時間微分を変数の上の "·"（ドット）で表す表記法法である．すなわち，x の時間での一階微分を $\dot{x}$ とし，二階微分を $\ddot{x}$ とする．これを用いると，以前扱った質量 m の質点が重力中に抵抗を受けながら運動する場合の運動方程式 $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - b\frac{dx}{dt}$ は，簡単に $m\ddot{x} = -mg - b\dot{x}$ などと書ける．

13. 減衰振動

問 1. 下図のようにバネの一端を壁に固定し，もう一方に質量が m の物体を結びつけて振動させる場合を考える．ただし，この物体は流体（気体や液体）の中にあり，運動中に周囲の媒質から抵抗をうけるとする．なお，物体の運動は直線上に制限されるので，図のように x 軸を取って 1 次元の運動と考えることができる．以下の設問に答えよ．



(1) バネの伸びを x として，バネ定数を k とすれば，物体に作用するバネの力 F_k はどうなるか．

(2) 流体中では物体は，大きさが速さ $|v(t)|$ に比例し，向きが速度と逆向きの粘性抵抗 F_l を受けると考えられる．この粘性抵抗の比例係数を $2ml$ としたとき，粘性抵抗 F_l はどうなるか．速度 v を x を用いる．

(3) 物体の運動方程式を書け．

(4) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ として，運動方程式を変形せよ．

(5) $x = f(t)e^{\lambda t}$ とおいて運動方程式に代入し，定数 λ の値を求めよ．

(6) 運動方程式の解 x の形は，λ の値によって大きく異なる．初期条件として時刻 $t = 0$ での物体の位置が $x = A$，速度が $v = 0$ であるとするとき，次の典型的な 3 つの場合，すなわち $l = \omega_0$，$l = \frac{1}{2}\omega_0$，$l = 2\omega_0$ のとき，それぞれの解はどうなるか．

14. 強制振動

問 2. 問 1 と同様に，バネに繋がれた物体の運動を考える．今回は，周囲の抵抗に加えて，周期的な外力 $F_0 \cos\omega t$（F_0 と ω は定数）を与える場合を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 物体の速度と加速度を x で表す場合，力の和 F を書け．

(2) この物体の運動方程式を書け．

(3) $f_0 = \frac{F_0}{m}$ を用いて運動方程式を変形せよ．

(4) $l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ である場合，微分方程式の一般解を求めよ．

(5) $l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ である場合，初期条件として $t = 0$ での位置を $x = A$，速度を $v = 0$ とするとき，時刻 t での物体の位置 x はどうなるか．また，十分時間が経過したとき運動はどうなるか．

* 電通大 非常勤／国立天文台　Web サイト：http://th.nao.ac.jp/~nishmrnb/lec/me2010/　e-mail: nobuya.nishimura@nao.ac.jp