

## 力学第一演習 No. 09 (月5) 担当: 西村 信哉\*

## 17. 仕事

問1. 時刻  $t = 0$  で、十分な高さ  $h$  の位置から水平方向に速さ  $v_0$  で質量  $m$  の質点を投げ出した。重力加速度の大きさを  $g$  として、以下の間に答えよ。

まず、質点の運動中に 重力のみが働く場合 を考える。

- (1) 質点の運動方程式を示し、高さ  $h$  だけ落下した時刻での速度を求めよ。
- (2) 高さ  $h$  だけ落下した後の質点の運動エネルギー  $K_1$  を求めよ。
- (3)  $K_1$  と時刻  $t = 0$  での運動エネルギー  $K_0$  との差  $\Delta K_1 \equiv K_1 - K_0$  を求めよ。

次に、質点に重力とともに、速さの1乗に比例し、比例係数が  $k$  の粘性抵抗が働く場合 を考える。

- (4) 十分時間が経過し、質点が一定の速度（終端速度）に達したとする。終端速度を具体的に求めよ。
- (5) 上の終端速度になっている質点の運動エネルギー  $K_2$  と時刻  $t = 0$  での運動エネルギー  $K_0$  との差  $\Delta K_2 \equiv K_2 - K_0$  を求めよ。
- (6) 上の設問の結果より、運動エネルギーの差  $\Delta K_1$  と  $\Delta K_2$  は異なる。その理由を考察せよ。

## 18. ポテンシャル（位置エネルギー）

問2. 重力加速度の大きさが  $g$  の一様な重力のもとで、高低差が  $h$  の崖の上に点  $P_1$ 、崖の下に点  $P_2$  を置いた。以下の間に答えよ。

- (1) 基準点を  $P_1$  に選ぶ場合、 $P_1$  と  $P_2$  の位置エネルギーをそれぞれ求めよ。
- (2) 基準点を  $P_2$  に選ぶ場合、 $P_1$  と  $P_2$  の位置エネルギーをそれぞれ求めよ。

問3. ポテンシャルを表す関数  $U(x, y, z)$  を定義するには、基準点を  $\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  はそれぞれ、 $x, y, z$  軸方向の単位ベクトル: 基底ベクトル)、質点に作用する力を  $\mathbf{F}$  として、

$$U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

と定義される。ここで、 $U(x_0, y_0, z_0) = 0$  となるように基準点  $\mathbf{r}_0$  を上手く選ぶと、

$$U(x, y, z) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

となる。これをもとに以下の間に答えよ。

- (1) 質量が  $m$  の質点に作用する力が重力のみの場合、高さ  $h$  でのポテンシャル（位置エネルギー）は鉛直方向上向きに  $z$  軸をとると  $U(0, 0, h) = mgh$  と表される。この場合、 $U(x_0, y_0, z_0) = 0$  となる基準点はどこに選べばいいか。
- (2) 質量  $m$  の質点にバネ定数  $k$  のバネをつけると、バネの伸びが  $x_0$  で質点が静止した。鉛直方向下向きに  $x$  軸を取り、原点  $O$  を自然長のバネの下端の位置に取ったとき、バネの伸び（質点の位置）が  $x_0$  の点をポテンシャルの基準点 ( $U(x_0, y_0, z_0) = 0$  となる点) とすると、バネの伸び（質点の位置）が  $x \neq x_0$  の点でのポテンシャルは  $U(x, 0, 0) = \frac{mg}{2x_0}(x - x_0)^2$  と表されることを示せ。