

力学第一演習 No. 10 (月5) 担当: 西村 信哉*

19. ポテンシャルと力

問1. ポテンシャルが位置の関数として次のように表されるとき, 力 \mathbf{F} を求めよ. ただし, A, B, k は定数である.

(1) $U(x) = Ax^2 - Bx^3$

(2) $U(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$

問2. 3次元の直交座標系において $U(x, y, z) = -\frac{C}{x^2 + y^2 + z^2}$ であらわされるポテンシャルがある. ただし, C は定数であり, 位置ベクトル \mathbf{r} に対して, $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である. このポテンシャルから力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ を求め, その大きさ F も計算せよ.

20. 力学的エネルギー保存則

問3. バネ定数が k のバネの一端に質量 m の小球を取り付け, 水平面上におきもう一方の端を固定した場合を考える. バネが自然長の場合の小球の位置を原点 O とし, 水平方向のバネの伸びる向きを x 軸に取る. 小球を引いて, バネの伸びが A のときの位置を点 P_1 とする. 時刻 $t = 0$ で, 点 P_1 から小球の速度が 0 となるようにそっと放した. 以下の間に答えよ.

(1) 小球にはバネの力のみが作用するとして, 位置 x で小球に作用する力 F を答えよ.

(2) 原点 O を基準としたとき, 位置 x でのポテンシャル $U(x)$ を求めよ.

(3) 原点 O を基準として, 点 P_1 での力学的エネルギーを求めよ.

(4) 時刻 $t > 0$ での小球の位置を x とし, 速度を v とするとき, 力学的エネルギー保存はどうなるか.

(5) バネの伸びが $\frac{1}{2}A$ のとき, 小球の速さはバネの伸びが 0 の場合の速さ v_0 の何倍か.

(6) 小球の速さが原点 O での速さ v_0 の 0.5 倍になる位置 $x_{1/2}$ を求めよ.

21. 運動エネルギーと力学的エネルギー保存の関係, ポテンシャル図

問4. バネ定数が k であるバネの一端に質量 m の小球を取り付け, 水平面上においてもう一方の端を固定する場合を考える. バネの自然長の位置を原点 O として, バネが伸び縮みする方向に x 軸をとる. 小球を引っ張ってバネの伸びが A となるときの位置を点 P_1 とする. 時刻 $t = 0$ で点 P_1 から小球の速度が 0 となるようにそっと放した. 以下の間に答えよ.

(1) 小球の運動方程式を書け.

(2) 運動方程式を解き, 問題中の条件より特殊解を求めよ.

(3) 時刻 t での速度 v を運動方程式の解から求め, 運動エネルギー K を時間 t の関数として求めよ.

(4) 位置 x でのポテンシャル U を求めよ.

(5) 運動エネルギー K とポテンシャル U の和が一定であることを示せ.

(6) 横軸を x , 縦軸をバネの力についてのポテンシャルとして, ポテンシャル図を描け.

(7) 力学的エネルギーが $\frac{1}{2}kA^2$ の場合, 小球が動ける x の範囲はどうなるか.