

力学第一演習 No. 11 (月5) 担当: 西村 信哉*

22. ベクトル積

問1. ベクトル A , B , C が次のように与えられるとき,

$$A = \cos\theta e_x + \sin\theta e_y, \quad B = -\sin\theta e_x + \cos\theta e_y, \quad C = e_x + e_z \quad (1)$$

以下の式を計算せよ. ただし, e_x , e_y , e_z はそれぞれ x , y , z 軸方向の単位ベクトルであり, θ は定数である.

- (1) $A \times B$, $B \times A$
- (2) $(A \times B) \times C$, $A \times (B \times C)$
- (3) $A \times (B + C)$, $A \times B + A \times C$

23. 角運動量, 面積速度, 力のモーメント

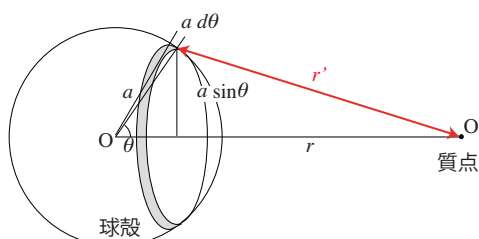
問1. xy 平面上の直線 $y = a$ に沿って x 軸の正の方向に一定の速さ v_0 で動いている質量 m の質点があるとする. この質点の角運動量 l と面積速度の大きさ $\frac{ds}{dt}$ を求めよ.

問2. xy 平面上で原点 O を中心とした半径 R_0 の円周上を反時計回りに回転している質量 m の質点がある. 時刻 $t = 0$ の質点の位置を $\mathbf{r} = R_0 e_x$ とするとき, 以下の間に答えよ. なお, 時刻 t での質点の位置と x 軸がなす角を θ とすること.

- (1) 時刻 t での質点の位置を書け.
- (2) 時刻 t での質点の速度を書け.
- (3) 時刻 t での質点の面積速度 $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ を求めよ.
- (4) 時刻 t での質点の角運動量 \mathbf{L} を求めよ.
- (5) 質点に作用する力 \mathbf{F} が $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}(t)$ の形でかける場合, その力のモーメント \mathbf{N} を文中の記号で表せ. ただし, $f(r)$ は原点 O から質点までの距離 r の関数である.
- (6) 質点の角運動量 \mathbf{L} は時間が経過するとどうなるか.
- (7) 上の結果より, 時刻 t での質点の位置 \mathbf{r} と x 軸のなす角 θ はどのように表せるか.

24. 万有引力

問3. 半径 R_0 で質量分布が一様な球体と質点との間に作用する万有引力について考える. 球体の全質量が M , 質点の質量が m であるとし, 万有引力定数を G とする. 以下の間に答えよ.



- (1) 球体の中心 O と質点の距離を r とし, $r = \infty$ で位置エネルギーが 0 となるように基準点を選んだ場合の位置エネルギー $U(r)$ を求めよ. なお, 球体には中心を通る非常に細い穴が空いており, 質点はその穴を通ることで球体の内側にも入ることが可能であると考えてよい. すなわち, 球体の中心 O と質点との距離 r の範囲は $0 < r < \infty$ である.
- (2) 球体が質点に作用する万有引力の大きさ $F(r)$ を求めよ. ただし, (1) と同様に, 質点が球体の内部にも存在できることに注意すること.

* 電通大 非常勤/国立天文台 Web サイト: <http://th.nao.ac.jp/~nishmrnb/lec/me2010/> e-mail: nobuya.nishimura@nao.ac.jp